Департамент образования Администрации города Дзержинска
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя школа № 22 с углубленным изучением французского языка»
г. Дзержинска Нижегородской области

Принята на заседании
педагогического совета
МБОУ СШ № 22
с углубленным изучением
французского языка
Протокол № 1 от 29.08.2024

Утверждена приказом
директора МБОУ СШ № 22
с углубленным изучением
французского языка
Приказ № 369-п от 28.08.2024

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа естественно-научной направленности «Избранные разделы математики»

Возраст учащихся: 16-18 лет
Срок реализации программы: 2 год

Автор-составитель: Вашуркина Н.Л., Спрыгина Ж.Б.,
педагоги дополнительного образования

2024 год

Пояснительная записка

Данный курс выполняет функцию поддержки основных курсов цикла математического образования старшей школы и ориентирован на углубление и расширение предметных знаний по математике и соответствующих компетентностей по ним.

Программа элективного курса состоит из двух завершенных образовательных разделов одной и то же продолжительности 34 часа:

1. геометрия;
2. функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах.

Данная программа своим содержанием сможет привлечь внимание учащихся 10 – 11 классов, которым интересна элементарная математика и её приложения. Предлагаемый курс освещает вопросы, оставшиеся за рамками школьного курса математики. Он выполняет следующие основные функции:

- развитие содержания базовых учебных предметов по математике, что позволяет поддерживать их изучение на профильном уровне и получить дополнительную подготовку для сдачи единого государственного экзамена;
- удовлетворение познавательного интереса обучающихся, выбравших для себя те области деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира.

Поэтому одной из важных задач введения этого курса является не только прагматическая составляющая по развитию интереса к математике как необходимому средству поступления в ВУЗ, но и развитие у учащихся интереса собственно к математике. Ученик должен чувствовать эстетическое удовлетворение от красиво решенной задачи, от установленной им возможности приложения математики к другим наукам. В математике эквивалентом эксперимента предметов естественнонаучного цикла является решение задач. Поэтому и курс строится на решении различных по степени важности и трудности задач.

Направленность курса – развивающая. Прежде всего, он ориентирован на удовлетворение и поощрение любознательности старших школьников, их аналитических и синтетических способностей.

В процессе реализации элективного курса можно использовать разнообразные подходы к организации занятий как академические лекции, семинары, уроки, так и проектную и исследовательскую деятельность, практики, игровые технологии и т.д.

Предполагается, что в результате изучения курса учащиеся овладеют:

- элементами теории множеств, умением математического моделирования при решении задач различной сложности, знаниями, связанными с равносильностью уравнений и неравенств на множестве, что позволяет единообразно решать большие классы задач;
- нестандартными методами решений уравнений и неравенств с использованием свойств функций;
- геометрическими сведениями, которые не только помогут учащимся углубить свои знания по геометрии, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении геометрии, но и предоставляют хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к вступительным экзаменам по математике в ее геометрической части;
- навыками решения нестандартных задач, включая задачи с параметром, для этого предложена некоторая классификация таких задач и указаны характерные внешние признаки в их формулировках, которые позволяют школьнику сразу отнести задачу к тому или иному классу;
- умениями, связанными с работой с научно-популярной и справочной литературой;
- элементами исследовательских процедур, связанных с поиском, отбором, анализом, обобщением собранных данных, представлением результатов самостоятельного микроисследования.

В рамках данного курса предполагается различный текущий и итоговый контроль: тесты, самостоятельные работы, выполнение проектов и исследовательских работ. Способ изложения материала в проектах побуждает учащихся не просто механически запоминать учебный материал, но и размышлять над ним в процессе обучения.

С учетом того, что данный курс выбирается учащимися самостоятельно, целесообразно, при оценке результата, использовать наравне с традиционной и нетрадиционную систему оценивания.

Практически по каждой теме, затронутой в программе, курс предоставляет учителю и ученику дополнительные материалы как теоретического, так и практического характера. Кроме того, отдельные пункты курса могут послужить основой для докладов на математических кружках и факультативах. Первый раздел представлен наиболее полно, так как охватывает широкий круг вопросов.

Данная программа имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, намечает и использует целый ряд межпредметных связей.

Примерное учебно-тематическое планирование

программы курса в 10 -11 классах

№	Наименование разделов и дисциплин	Всего часов	Лекции	Выполнение практических заданий
1	**Геометрия**	**34**	**17**	**17**
	Планиметрия	**22**	**11**	**11**
	Из истории геометрии. Занимательные задачи по геометрии.	1	1	-
	Прямоугольный треугольник.	2	1	1
	Вычисление медиан, биссектрис, высот треугольника.	2	1	1
	Свойства касательных, хорд, секущих.	2	1	1
	Вписанные и описанные треугольники и четырехугольники.	1	1	-
	Различные формулы площади и их применение.	2	1	1
	Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея.	12	5	7
	Стереометрия	**12**	**6**	**6**
	Сечения многогранников.	3	1	2
	Многогранники и тела вращения.	3	1	2
	Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена	4	3	1
	Углы между прямыми, прямыми и плоскостями.	2	1	1
	11 класс			
2	**Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах**	**34**	**12**	**22**
	Многочлены	2	1	1
	Рациональные функции	4	1	3

	Иррациональные функции	6	2	4
	Показательные функции	4	1	3
	Логарифмические функции	6	2	4
	Тригонометрические функции	6	3	3
	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.	4	2	2
	Повторение. Решение задач.	2	-	2

Календарный учебный график
10 класс

№	Дата	Форма занятия	Кол-во часов	Тема занятия	Форма контроля
Раздел 1. Планиметрия					
1		Лекция, презентация	1	Из истории геометрии. Занимательные задачи по геометрии.	Беседа
2		Лекция, презентация	1	Прямоугольный треугольник.	Беседа
3		практика	1	Прямоугольный треугольник.	практич. работа
4		Лекция, презентация	1	Вычисление медиан, биссектрис, высот треугольника.	Беседа
5		Лекция, практика	1	Вычисление медиан, биссектрис, высот треугольника.	Беседа, практ.работа
6		Лекция, презентация	1	Свойства касательных, хорд, секущих.	Беседа
7		практика	1	Свойства касательных, хорд, секущих.	Самост. работа
8		Лекция, презентация	1	Вписанные и описанные треугольники и четырехугольники.	Беседа
9		Лекция, презентация	1	Различные формулы площади и их применение.	Беседа
10		практика	1	Различные формулы площади и их применение.	Беседа, практ.работа
11		Лекция, презентация	1	Теорема Стюарта и параметры треугольников	Беседа
12		Лекция, презентация	1	Теорема Стюарта и параметры треугольников	Беседа, практич. работа
13		Лекция,	1	Теорема Чевы. Пересечение высот в треугольнике.	Беседа
14		Лекция, практ.занятие	1	Теорема Чевы. Пересечение	Самост. работа

				высот в треугольнике.	
15		Лекция,	1	Теорема о пересечении чевиан.	беседа
16		Лекция, практ.занятие	1	Теорема о пересечении чевиан.	Тест, практ.работа
17		Лекция, практ.занятие	1	Теорема о прямой Эйлера.	Беседа,
18		Лекция, практ.занятие	1	Теорема Эйлера для четырёхугольника.	Беседа,
19		Лекция, практ.занятие	1	Теорема Птолемея	Беседа,
20		Лекция, практ.занятие	1	Теорема Мансиона.	Беседа, практ.работа
21		Лекция, практ.занятие	1	Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея.	практ.работа
22		Лекция, практ.занятие	1	Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея.	практ. работа
Раздел 2. Стереометрия					
23		Лекция, презентация	1	Сечения многогранников.	Беседа
24		Лекция, практ.занятие	1	Сечения многогранников.	Беседа, практ.работа
25		Лекция, презентация	1	Сечения многогранников.	Самост. работа
26		Семинар, практическое занятие	1	Многогранники и тела вращения.	Беседа
27		Лекция, практ.занятие	1	Многогранники и тела вращения.	Беседа, практ.работа
28		Лекция, практ.занятие	1	Многогранники и тела вращения.	Беседа, практ.работа
29		Лекция, презентация	1	Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена	Беседа
30		Лекция, презентация	1	Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена	Беседа
31		практика	1	Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена	Беседа, практ. работа
32		практика	1	Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена	Самост. Работа.
33		Лекция, презентация	1	Углы между прямыми, прямыми и плоскостями.	Беседа
34		практика	1	Углы между прямыми, прямыми и плоскостями.	Беседа, практич. работа
35		практика	1	Круглый стол «Подведем итоги»	Занимательные вопросы

11 класс

№	Дата	Форма занятия	Кол-во часов	Тема занятия	Форма контроля
Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах.					
1		Лекция, практ.занятие	1	Многочлены	Беседа,
2		Лекция, практ.занятие	1	Многочлены	Беседа, практ.работа
3		Лекция, презентация	1	Рациональные функции	Беседа
4		Семинар, практическое занятие	1	Рациональные функции	Беседа, практика
5		Семинар, практическое занятие	1	Рациональные функции	Практическая работа
6		практическое занятие	1	Рациональные функции	Самост. работа № 1
7		Лекция, презентация	1	Иррациональные функции	беседа
8		Лекция, презентация	1	Иррациональные функции	Беседа
9		практическое занятие	1	Иррациональные функции	Беседа, практ.работа
10		Семинар, практическое занятие	1	Иррациональные функции	Практика
11		Семинар, практическое занятие	1	Иррациональные функции	Практич. работа
12		Семинар, практическое занятие	1	Иррациональные функции	Самост. работа № 2
13		Лекция, презентация	1	Показательные функции	Беседа
14		Практическое занятие	1	Показательные функции	Беседа, практ.работа
15		Семинар, практическое занятие	1	Показательные функции	Самост. работа № 3
16		Практическое занятие	1	Показательные функции	Практич. работа
17		Лекция, презентация	1	Логарифмические функции	Беседа,
18		Лекция, презентация	1	Логарифмические функции	Беседа
19		Лекция, практ.занятие	1	Логарифмические функции	Беседа, практ.работа
20		Семинар, практическое занятие	1	Логарифмические функции	Тест
21		Семинар,	1	Логарифмические функции	Практич. работа

		практическое занятие			
22		Практика	1	Логарифмические функции	Самост. работа № 4
23		Лекция, презентация	1	Тригонометрические функции	Беседа
24		Лекция, презентация	1	Тригонометрические функции	Беседа
25		Лекция, презентация	1	Тригонометрические функции	Беседа
26		Лекция, практ.занятие	1	Тригонометрические функции	практика
27		Лекция, практ.занятие	1	Тригонометрические функции	Беседа, практ.работа
28		Семинар, практическое занятие	1	Тригонометрические функции	практич. работа
29		Лекция, презентация	1	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.	Беседа
30		Семинар, практическое занятие	1	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.	практич. работа
31		Лекция, практ.занятие	1	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.	Самост. работа № 5
32		Семинар, практическое занятие	1	Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ.	Самост. работа № 6
33		Семинар, практическое занятие	1	Повторение. Решение задач.	Тест
34		Семинар, практическое занятие	1	Повторение. Решение задач.	Тест

Содержание образовательной программы

1. Геометрия (34 час.)

Из истории геометрии. Занимательные задачи по геометрии (1час.) Прямоугольный треугольник (2час.) Вычисление медиан, биссектрис, высот треугольника (2час.) Свойства касательных, хорд, секущих (2час.) Вписанные и описанные треугольники и четырехугольники (1час.) Различные формулы площади и их применение (2час.)

Теоремы Чевы, Эйлера, Стюарта, Птолемея (12час.)

Сечения многогранников (3час.) Многогранники и тела вращения (3час.) Формулы Симпсона, Паппа-Гюльдена (4час.) Углы между прямыми, прямыми и плоскостями (2час.)

2. Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах (34 час.)

Многочлены (2час.) Рациональные функции (4час.) Иррациональные функции (6час.) Тригонометрические функции (6час.) Показательные функции (4час.) Логарифмические функции (6час.) Особенности заданий с параметрами в ЕГЭ. (4час.) Повторение. Решение задач (2час.)

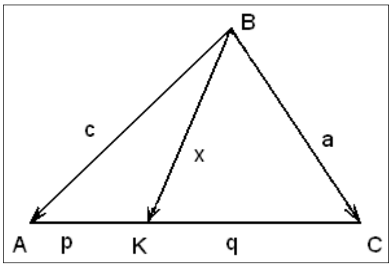
Методическое обеспечение

Геометрия

1. Теорема Стюарта и параметры треугольников

Теорем и задач, которые вошли в учебники геометрии довольно много. Некоторые из них заслуживают определённого внимания, так как обладают некоторой общностью и могут помочь в сложных заданиях ЕГЭ.

Формулы, позволяющие определить медианы и биссектрисы треугольника по заданным сторонам треугольника, являются частными случаями более общей формулы, которая является основой ***теоремы Стюарта*** (Мэтью Стюарт, шотландский астроном и математик , 1717-1785).



Рассмотрим треугольник ABC (см. рис.1), в котором $AB = c$, $BC = a$, $BK = x$, $AK = p$, $KC = q$, $AC = b$. Задача состоит в том, чтобы по заданным четырём параметрам – a, c, p, q – определить отрезок BK.

Рис.1

Воспользуемся известным равенством для векторов $\overrightarrow{BA}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BK}=\vec{x}$: $\boxed{\overrightarrow{BK}=\frac{p}{p+q}\cdot\vec{a}+\frac{q}{p+q}\cdot\vec{c}}$, из которого после возведения в квадрат получаем выражение

$x^2=\frac{p^2}{(p+q)^2}\cdot a^2+\frac{q^2}{(p+q)^2}\cdot c^2+\frac{2pq}{(p+q)^2}\vec{a}\cdot\vec{c}$. С другой стороны, $2\vec{a}\cdot\vec{c}=a^2+c^2-b^2$.

Таким образом, после подстановки и некоторых преобразований, можно получить формулу для определения отрезка *BK*: $\boxed{x^2 = \frac{p}{p+q}\cdot a^2 + \frac{q}{p+q}\cdot c^2 - pq}$.

Тот же результат можно получить, если записать теорему косинусов для треугольников *ABK* и *ABC*, выбрав общий угол *A*.

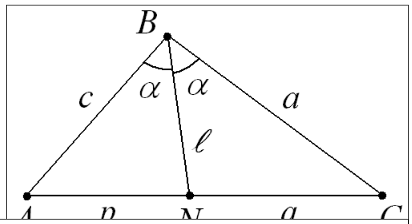
Рассмотрим частные случаи этой формулы.

1). Пусть *BK* является медианой. Тогда $p = q = \frac{b}{2}$ и имеем формулу для расчета медиан $\boxed{m^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$.

2). Пусть *BK* является биссектрисой. Тогда $p/q = c/a$ и получаем формулу для биссектрисы $\boxed{\ell^2 = ac - pq}$.

3). Если *BK* – отрезок в равнобедренном треугольнике, то в этом случае $\boxed{x^2 = a^2 - pq}$, где *a* – боковая сторона треугольника.

Следующие формулы для биссектрисы являются необходимым дополнением к решению треугольников.



Формула $\boxed{\ell = \frac{2ac\cdot\cos\alpha}{a+c}}$ легко получается из простого соотношения $S_{ABN} + S_{BNC} = S_{ABC}$ (все обозначения соответствуют рис.2).

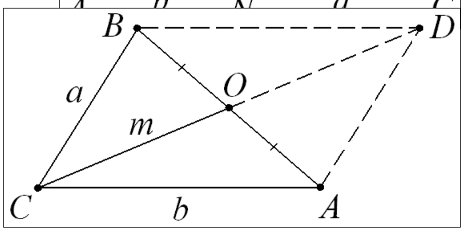


Рис. 3

Формула для биссектрисы, выраженная через три стороны треугольника, получается после ряда преобразований. Так как $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos 2\alpha = (a+c)^2 - 4ac\cdot\cos^2\alpha$, откуда $\cos^2\alpha = \frac{(a+c)^2 - b^2}{4ac}$, то первую формулу для биссектрисы легко преобразовать в следующую: $\ell^2 = \frac{4a^2c^2\cos^2\alpha}{(a+c)^2} = \frac{ac}{(a+c)^2}\cdot\left((a+c)^2 - b^2\right) = ac - \frac{acb^2}{(a+c)^2}$. Таким образом, имеем $\boxed{\ell = \sqrt{ac\cdot\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)}}$.

Учитывая, что $p/q = c/a = (b-q)/q$, получаем ещё ряд полезных соотношений: $q = \frac{ab}{a+c}$, $p = \frac{bc}{a+c}$ включая и уже полученный ранее результат $\ell^2 = ac - pq$.

Формула для медианы, полученная ранее, также выводится из других источников. Например, следует из известного равенства для параллелограмма $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2+b^2)$, если в нём принять $AB = d_1 = c$, $CD = d_2 = 2m$ (см. рис.3). В результате получаем следующее выражение $\boxed{m^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$.

Этот же результат можно получить, применяя теорему косинусов для треугольников *ABC* и *AOC*, выбрав общий угол *OAC*.

При решении треугольников, а также в теме “Правильные многоугольники” довольно часто встречаются тригонометрические функции 15°, 22,5°, 18°, 36° и других. Поэтому таблицы функций для 30°, 45°, 60°, 90° следует дополнить и этими данными. Если для 15°, 22,5° можно воспользоваться обычными формулами половинного угла, то для функций 18°, 36° формулой синуса тройного угла:

$$\sin 36^0 = \cos 54^0 = \cos(3\cdot 18^0) \quad , \quad 2\sin 18^0 \cos 18^0 = 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0 \quad , \quad 4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0 \quad ,$$

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^0 , \quad \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54°.$$

Таким образом,

дополнение к таблице тригонометрических функций имеет вид:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22,5°	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
36°	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

При решении планиметрических или стереометрических задач иногда пользуются формулой Герона. Как правило, в этом случае стороны треугольника соответствуют сторонам так называемого рационального треугольника. Это треугольник, у которого стороны, площадь и радиусы вписанной и описанной окружностей представляют собой рациональные числа. Приведем ряд формул, с помощью которых всегда можно воссоздать рациональный треугольник.

Итак, пусть даны $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, тогда $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A+B}{2} = \dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$. Далее воспользуемся тем, что

$$\sin A = \frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{2\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}} = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} = \frac{c}{2R}.$$

Учитывая то, что $S = \frac{abc}{4R}$ и $S = pr$, при рациональных значениях $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ и R получаем рациональные значения *a*, *b*, *c* и *S*. Например, пусть $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$, тогда $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \dfrac{1-\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \frac{11}{7} \quad \Rightarrow \quad \sin A = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{16}} = \frac{8}{17}$,

$\sin B = \dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}} = \dfrac{3}{5}$, $\sin C = \dfrac{2\cdot\frac{11}{7}}{1+\frac{121}{49}} = \dfrac{77}{85}$. Теперь пусть $R = 85/2$, тогда будет a = 40, b = 51, c = 77, S = 924 и r = 11.

Следует отметить, что в случае иррациональных сторон треугольника лучше воспользоваться другой формулой площади, легко получаемой из формулы Герона: $\boxed{S = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}}$.

2. Теорема Чевы. Пересечение высот в треугольнике.

В обязательный минимум содержания основных образовательных программ профильного уровня по геометрии входят известные теоремы планиметрии: теорема Чевы и теорема Менелая. Но эти теоремы интересны ещё и своими следствиями. Прежде обратимся к самой теореме Чевы (Джованни Чева, итальянский математик, 1648-1734).

Теорема Чевы

Если на сторонах *AB, BC, CA* треугольника *ABC* (рис.4) **взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1, то отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда** $\boxed{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1 = B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A}$ (*)

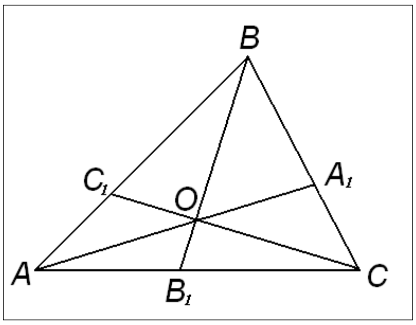


Рис.4

В основе доказательства прямой теоремы лежат следующие соображения. Пусть отрезки пересекаются в точке O,

тогда $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{S_{AOB_1}}{S_{B_1OC}} = \dfrac{S_{ABB_1}}{S_{B_1BC}} = \dfrac{S_{ABB_1} - S_{AOB_1}}{S_{B_1BC} - S_{B_1OC}} = \dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}}$. При выводе был использован принцип равных отношений: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

Таким образом, имеем: $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}}$, $\dfrac{BC_1}{C_1A} = \dfrac{S_{BOC}}{S_{AOC}}$, $\dfrac{A_1C}{BA_1} = \dfrac{S_{AOC}}{S_{AOB}}$. Перемножая эти выражения, получаем соотношение (*).

В обратной теореме на сторонах треугольника взяты точки C_1, A_1, B_1 так, что выполняется равенство (*). Пусть точка $O = AA_1 \cap CC_1$. Проведём BO, которая пересекается с AC в точке B_2. По доказанному выше, имеем равенство: $AB_2 \cdot CA_1 \cdot BC_1 = B_2C \cdot A_1B \cdot C_1A$. Поделив оба выражения друг на друга почленно, окончательно приходим к выводу, что $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AB_2}{B_2C}$, т.е. точки B_1 и B_2 делят сторону AC в одном и том же отношении, что означает совпадение этих точек и исходные отрезки пересекаются в одной точке.

Воспользовавшись этим результатом, докажем теперь теорему о пересечении чевиан.

Теорема о пересечении чевиан

Чевианы в треугольнике ABC точкой пересечения O делятся в отношении

$\boxed{\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C}}$**, считая от вершины.**

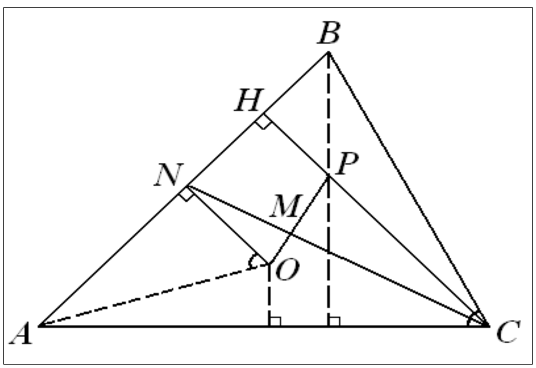
Имеем, с одной стороны: $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}$ и $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$. Откуда следует, что: $\frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BOC} + S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AOC}}{S_{AOC}}$. С другой стороны, получаем такой же результат из другого условия: $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BB_1 - OB_1}{OB_1} = \frac{S_{ABC} - S_{AOC}}{S_{AOC}}$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Рассмотрим частные случаи этой формулы. В случае медиан получаем классический результат: $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = 1 + 1 = 2$ или $\boxed{\frac{BO}{OB_1} = \frac{2}{1}}$.

В случае пересечения биссектрис следует учесть, что $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{AC}$ и $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{CA}$. Таким образом, имеем: $\boxed{\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC + BA}{CA}}$.

При пересечении высот следует учесть, что каждый отрезок можно записать через высоты и углы треугольника. А именно, $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CC_1 \cdot ctgB}{CC_1 \cdot ctgA} + \frac{AA_1 \cdot ctgB}{AA_1 \cdot ctgC}$. В результате окончательно получаем $\boxed{\frac{BO}{OB_1} = \frac{tgA + tgC}{tgB}}$. Конечно, данный результат можно получить и другим путём, не используя теорему о чевианах. Однако, такой подход наиболее оптимален.

Рассмотрим задачи, где используется полученное выше выражение для высот.



Теорема о прямой Эйлера

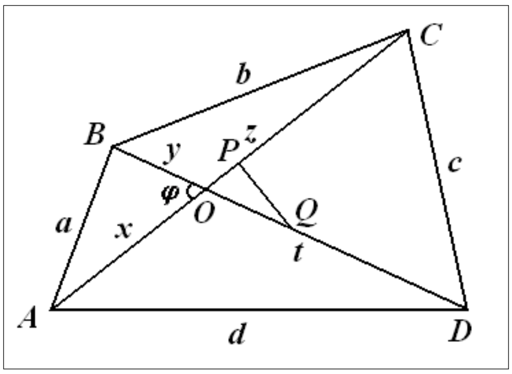
В любом треугольнике центр описанной окружности *O*, ортоцентр *P* и точка пересечения медиан *M* лежат на

одной прямой, причём точка *M* делит отрезок *OP* так, что $\frac{PM}{MO}=\frac{2}{1}$.

Прежде, чем перейти к доказательству, следует напомнить известное в планиметрии тригонометрическое тождество для треугольника $tgA\cdot tgB\cdot tgC = tgA+tgB+tgC$, которое легко доказывается, если в правую часть подставить следующее равенство $tgC=-tg(A+B)=\frac{tgA+tgB}{tgA\cdot tgB-1}$.

Итак, в треугольнике *ABC*, *CH* – высота, *NO* – серединный перпендикуляр, точка *O* – центр описанной окружности, точка *P* – ортоцентр. Пусть точка *M* есть пересечение медианы *NC* и отрезка *PO*. Из подобия треугольников *NOM* и *PMC* следует пропорция $\frac{PC}{ON}=\frac{PM}{OM}=\frac{MC}{NM}$. Теорема будет доказана, если будет доказано, что $\frac{PC}{ON}=\frac{2}{1}$. Итак, $\frac{PC}{CH-PC}=\frac{tgA+tgB}{tgC}$, откуда следует $PC=CH\cdot\frac{tgA+tgB}{tgA+tgB+tgC}=CH\cdot\frac{tgA+tgB}{tgA\cdot tgB\cdot tgC}$. Учитывая, что $\angle ACB=\angle AON$, имеем $ON=\frac{AB}{2tgC}$, где $AB=AH+HB=CH\cdot\left(ctgA+ctgB\right)$. Таким образом, $ON=\frac{CH}{2}\cdot\frac{tgA+tgB}{tgA\cdot tgB\cdot tgC}$, что и означает выполнение равенства $\frac{PC}{ON}=\frac{2}{1}$. Теорема доказана.

Теорема Эйлера для четырёхугольника



Пусть x, y, z, t – отрезки диагоналей четырёхугольника со сторонами a, b, c, d; угол между диагоналями φ, *P* – середина *AC*, а *Q* – середина *BD*, тогда $OP=\frac{x+z}{2}-z=\frac{x-z}{2}$ и $OQ=\frac{t-y}{2}$. Теорема косинусов для ΔOPQ имеет вид:

$PQ^2=\left(\frac{t-y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-z}{2}\right)^2-2\left(\frac{t-y}{2}\right)\left(\frac{x-z}{2}\right)\cos\varphi$, или

$$4PQ^2=x^2+y^2+z^2+t^2-2ty-2xz-2\left(tx+yz-yx-zt\right)\cos\varphi.$$

Введем в рассмотрение треугольники *AOB, AOD, BOC, COD*. Для них выполняются равенства:

$$\begin{cases}a^2=x^2+y^2+2xy\cos\varphi\\ b^2=y^2+z^2-2yz\cos\varphi\\ c^2=z^2+t^2+2zt\cos\varphi\\ d^2=x^2+t^2-2xt\cos\varphi\end{cases}$$, из которых следует, что

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2x^2+2y^2+2z^2+2t^2-2\left(yz+xt-zt-xy\right)\cos\varphi.$$

Таким образом, $4PQ^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - x^2 - y^2 - z^2 - t^2 - 2ty - 2xz =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (x+z)^2 - (y+t)^2$, или $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4PQ^2}$,

что и составляет содержание ***теоремы Эйлера***.

В случае трапеции в наших обозначениях имеем $PQ = (d-b)/2$ и $BC \parallel AD$, тогда

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + (d-b)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 + c^2 + 2db = d_1^2 + d_2^2}$$

В случае же параллелограмма $PQ = 0$, $a = c$ и $b = d$, тогда $\boxed{d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)}$.

Кстати, последней формулой можно воспользоваться для более простого доказательства теоремы Эйлера. А именно, если считать треугольник ABD как половину соответствующего параллелограмма, то $a^2 + d^2 = 2\left(QB^2 + AQ^2\right)$. Аналогично, считая треугольник BCD половиной параллелограмма, имеем $b^2 + c^2 = 2\left(QC^2 + BQ^2\right)$. Таким образом,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4BQ^2 + 2(AQ^2 + CQ^2).$$

Теперь считаем треугольник ACQ половиной параллелограмма. В этом случае:

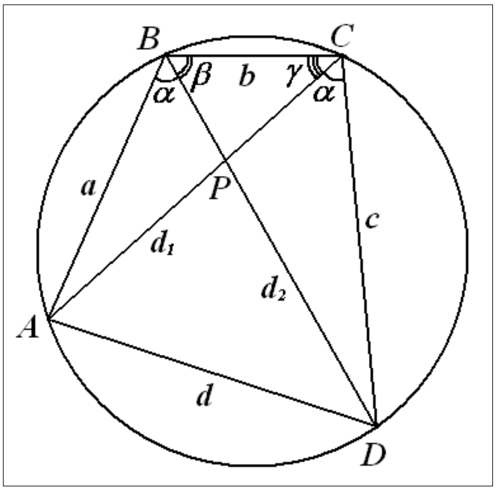
$AQ^2 + CQ^2 = 2(PQ^2 + AP^2)$. Учитывая, что $4BQ^2 = d_2^2$, $4AP^2 = d_1^2$, получаем формулу Эйлера.

Из той же системы равенств получаем следующую цепочку:

$a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = (xy + zt + yz + xt)2\cos\varphi \;\Rightarrow\; a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2(x+z)(y+t)\cos\varphi$, откуда окончательно имеем выражение $\boxed{a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2\, d_1 d_2 \cos\varphi}$.

Таким образом, диагонали четырёхугольника принадлежат перпендикулярным прямым тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

3. Теорема Птолемея

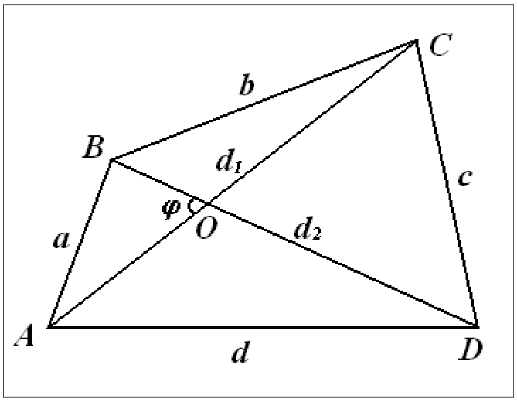


Клавдий Птолемей (ок.100-ок.178)– древнегреческий астроном, математик, географ. Он ввёл понятия широты и долготы местности. Автор «Великого математического построения астрономии в 13 книгах» («Альмагест»), в котором, в частности, изложены сведения по прямолинейной и сферической тригонометрии и дана теорема о выпуклом четырёхугольнике, вписанном в окружность. Благодаря теореме он составил таблицу хорд, которой воспользовался для астрономических вычислений.

Сумма произведений двух пар противоположных сторон вписанного четырёхугольника равна произведению его диагоналей $\boxed{d_1 d_2 = ac + bd}$

Общая формула площади четырёхугольника и теорема Птолемея

Рассмотрим теперь в общем виде взаимосвязь параметров четырехугольника. Все обозначения даны



на рисунке: d_1, d_2 – диагонали четырёхугольника со сторонами *a*, *b*, *c*, *d* и углом между диагоналями φ, По теореме косинусов выразим $\grave{A}\tilde{N}^2$ из треугольников *ABC* и *ACD* и приравняем:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$$

или $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2\left(ab\cos B - cd\cos D\right) \Rightarrow$

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2 = a^2b^2\cos^2 B - 2abcd\cos B\cos D + c^2d^2\cos^2 D \qquad (1)$$

Для площади четырехугольника *ABCD* имеем очевидное соотношение:

$S = \dfrac{1}{2}\left(ab\sin B + cd\sin D\right)$, откуда $4S^2 = a^2b^2\sin^2 B + 2abcd\sin B\sin D + c^2d^2\sin^2 D$. (2)

Сложив (1) и (2), получим $\left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2 + 4S^2 = a^2b^2 - 2abcd\cos(B + D) + c^2d^2$. (3)

Преобразуем выражение (3) для площади *S*:

$$16S^2 = \left(a^2b^2 + c^2d^2\right)\cdot 4 - 8abcd\cos(B + D) - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 =$$

$$= 4\left(a^2b^2 + c^2d^2\right) - 16abcd\cos^2\frac{B + D}{2} + 8abcd - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 =$$

$$= 4\left(ab + cd\right)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 - 16abcd\cos^2\frac{B + D}{2} =$$

$$= \left(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2\right)\left(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right) - 16abcd\cos^2\frac{B + D}{2} =$$

$$= \left((c + d)^2 - (a - b)^2\right)\left((a + b)^2 - (c - d)^2\right) - 16abcd\cos^2\frac{B + D}{2} =$$

$$= (c + d - a + b)(c + d + a - b)(a + b - c + d)(a + b + c - d) - 16abcd\cos^2\frac{B + D}{2} =$$

$$= (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2d) - 16abcd\cos^2\frac{B + D}{2}.$$

Отсюда следует формула площади: $\boxed{S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}}$

Если четырехугольник можно вписать в окружность, то $\angle B+\angle D=180°$, тогда получаем известную формулу Брахмагупты: $\boxed{S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$

Брахмагупта (ок. 598 – 660) – индийский математик и астроном.

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то $a+c=b+d$, $p=a+c=b+d$ и

$\boxed{S=\sqrt{abcd}\,\sin\frac{B+D}{2}}$. Наконец, если четырехугольник можно вписать в окружность и в него, в свою очередь, можно вписать окружность, то $\boxed{S=\sqrt{abcd}}$.

Для дальнейших преобразований воспользуемся формулой, полученной в параграфе «Теоремы Эйлера»: $\boxed{a^2+c^2-b^2-d^2=2\,d_1d_2\cos\varphi}$

С учетом этого и того, что $2S=d_1d_2\sin\varphi$, получаем следующую систему:

$$\begin{cases}4S^2=d_1^2d_2^2\sin^2\varphi\\ \left(\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}\right)^2=d_1^2d_2^2\cos^2\varphi\end{cases}$$

Складывая данные равенства, получаем:

$$\boxed{S^2=\frac{d_1^2d_2^2}{4}-\left(\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{4}\right)^2}\qquad(4)$$

Второе выражение для площади получим, разделив равенства системы друг на друга почленно:

$$\boxed{S=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{4}\operatorname{tg}\varphi}$$

Выпишем выражения (3) и (4) в систему:

$$\begin{cases}4S^2=d_1^2d_2^2-\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}\right)^2\\ 4S^2=a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos(B+D)-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2\end{cases}$$ Отсюда

$$d_1^2d_2^2=a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos(B+D)-\left[\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}\right)^2\right].$$

Поскольку $\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2-\left(a^2+c^2-b^2-d^2\right)^2=4\left(a^2b^2-b^2d^2-a^2c^2+c^2d^2\right)$

то $\boxed{d_1^2 d_2^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(B+D)}$

Таким образом, при $\angle B + \angle D = 180°$ получаем

$$d_1^2 d_2^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_1 d_2 = ac + bd}$$

С другой стороны, если $d_1 d_2 = ac + bd$, то из этого выражения следует, что $\cos(B+D) = -1$, откуда $\angle B + \angle D = 180°$.

Это и есть ***обобщённая теорема Птолемея*** для четырехугольника, вписанного в окружность.

Задачи на теорему Птолемея

1. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка M, отличная от A, B и C. Доказать, что один из отрезков AM, AB, AC равен сумме двух других.
2. В шестиугольнике ABCDEF, вписанном в окружность, AC = CE = EA, $BE + DA + FC = p$. Найти периметр шестиугольника.
3. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Докажите, что $AB + AC < 2 \cdot AD$.
4. На дуге CD описанной около квадрата ABCD окружности взята точка P. Докажите, что: $PA + PC = \sqrt{2} \cdot PB$; $PA - PC = \sqrt{2} \cdot PD$; $PC + PD = \dfrac{PA + PB}{\sqrt{2}+1}$.
5. Дан параллелограмм ABCD. Окружность, проходящая через точку A, пересекает отрезки AB, AC, AD в точках P, Q, R соответственно. Докажите, что $AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.
6. Докажите, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей.
7. На гипотенузе треугольника ABC с катетами a и b построен квадрат. Найти расстояние от вершины треугольника C до точки пересечения диагоналей квадрата.
8. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найти площадь треугольника с вершинами в центрах **Теорема Мансиона**

Отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам. Пауль Мансион – бельгийский математик, 1844-1919 г.

Пусть N – середина отрезка EO. Докажем, что в этом случае отрезок PN есть радиус описанной окружности. Итак,

$$PN^2 = \frac{PE^2 + PO^2}{2} - \frac{EO^2}{4} = \frac{R^2 - 2Rr + R^2 + 2R\rho}{2} - \frac{(\rho - r)^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = R^2 + R(\rho - r) - \frac{(\rho - r)^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

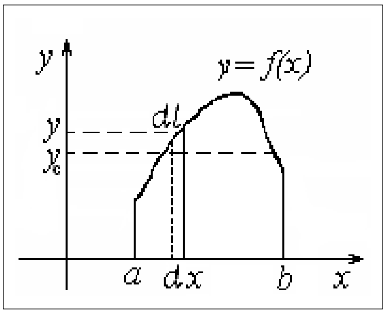
$$PN^2 = R^2 + (\rho - r)\left(R - \frac{(\rho - r)}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\right) = R^2 + (\rho - r)\left(R - \frac{à \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\right) = R^2 + (\rho - r)\left(R - \frac{a}{2\sin\alpha}\right) = R^2$$

Теоремы Паппа-Гюльдена

В процессе написания новых стандартов по математике за последние 40 лет произошла потеря очень интересных и несложных теорем, которые были раньше в программе. Одна из потерь – теоремы Паппа (александрийский математик 3в н.э.) – Гюльдена (швейцарский математик 17в.). Теоремы не только легко выводятся, но и легко запоминаются.

Теорема 1. Площадь поверхности вращения плоской кривой вокруг не пересекающей её оси равна произведению длины этой кривой на путь, проходимый её центром тяжести.

На рисунке показана кривая, вращающаяся вокруг оси Ох. Разбиваем кривую на отрезки длиной *dl* с координатой *y*. У каждого отрезка центр тяжести совпадает с координатой. Масса i-того отрезка m_i равна длине отрезка, т.е. $\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, а масса всей кривой М равна длине кривой на данном отрезке. Таким образом, ордината центра тяжести кривой при замене суммирования интегрированием равна:

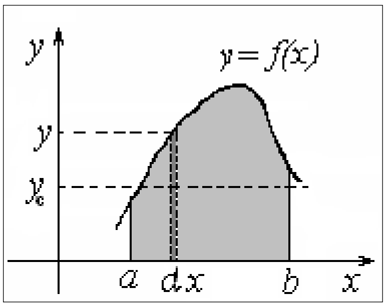


$$y_c=\frac{\sum_i m_i y_i}{M}=\frac{\int_a^b y\,dl}{L}=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{L}.$$

С другой стороны, поверхность тела вращения равна $S_{âð}=\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. В результате получаем формулу, соответствующую первой теореме Паппа-Гюльдена: $\boxed{S_{вр}=2\pi\cdot y_c\cdot L}$.

Теорема 2. Объём тела вращения плоской фигуры вокруг не пересекающей её оси равен произведению площади этой фигуры на путь, проходимый её центром тяжести.

Если первая теорема мало применима, поскольку вычисление длины какой-либо дуги или площади поверхности вращения сводятся в большинстве случаев к достаточно сложным интегралам, то вторая теорема предоставляет большие возможности для использования.



Итак, на рисунке показана криволинейная трапеция, вращающаяся вокруг оси Ох. Разбиваем пластинку на полоски толщиной *dx*

и длиной *y*. У каждой полоски центр тяжести лежит на середине. Масса i-той полоски m_i равна площади этой полоски, т.е. $y_i dx$, а масса всей пластинки М равна площади криволинейной трапеции. Таким образом, ордината центра тяжести криволинейной трапеции при замене суммирования интегрированием равна: $y_c = \dfrac{\sum_i m_i \frac{y_i}{2}}{M} = \dfrac{\int_a^b y^2 dx}{2\int_a^b y dx}$. С другой стороны, объём тела вращения равен $V = \pi \int_a^b y^2 dx$. В результате получаем формулу, соответствующую второй теореме Паппа-Гюльдена: $\boxed{V = 2\pi \cdot y_c \cdot S}$.

Пусть дана функция $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. Тогда $S = \int_0^\pi \sin x dx = 2$, объём тела вращения вокруг оси Ох $V_x = \pi \int_0^\pi y^2 dx = \dfrac{\pi^2}{2}$. Ордината центра тяжести пластинки $y_c = \dfrac{\pi}{8}$.

Пусть теперь вращение происходит вокруг оси Оу и вращается пластинка с границами, соответствующими множеству точек $|y| = \sin x$ в том же отрезке $[0; \pi]$. В этом случае

$S = 4$, абсцисса центра тяжести $x_c = \dfrac{\pi}{2}$ и объём тела вращения (подобного тору) $V_y = 4\pi^2$.

Задачи на теорему Паппа-Гюльдена

1. Прямоугольник со сторонами a и b вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельно диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объём.
2. Правильный шестиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной a. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объём.
3. Правильный восьмиугольник вращается вокруг одной из сторон, равной a. Найдите площадь поверхности тела вращения и его объём.
4. Найдите объём и площадь поверхности тора с радиусом сечения, равным r и расстоянием до центральной оси, равным a.

Дополнительные формулы объёма многогранников

1. Формула Ньютона – Симпсона

Тело, имеющее объём, расположено между плоскостями $z=0$ и $z=h$. Известно, что площадь сечения тела плоскостью $z=const$ есть функция вида $S(z)=az^2+bz+c$, $0\le z\le h$. Доказать формулу $\boxed{V=\frac{h}{6}\cdot\left(S(0)+4S\left(\frac{h}{2}\right)+S(h)\right)}$.

Найдём объём тела из общей формулы $V=\int\limits_0^h S(z)dz=\frac{ah^3}{3}+\frac{bh^2}{2}+ch=\frac{h}{6}\left(2ah^2+3bh+6c\right)$. С другой стороны, запишем систему равенств: $\begin{cases} S(0)=c \\ S(h)=ah^2+bh+c \\ 4S\left(\frac{h}{2}\right)=ah^2+2bh+4c \end{cases}$. В результате сложения получаем выражение в скобках в формуле объёма, приведённой выше. Так как для пирамиды, усечённой пирамиды, конуса, усечённого конуса, шара, призмы необходимое условие квадратичной зависимости площади сечения от аппликаты выполняется, поэтому формула достаточно универсальна.

Примеры:

1. Найдите объём трёхосного эллипсоида, заданного своей канонической формулой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Для вычисления объёма учтём, что $S(-c)=S(c)=0$, так как сечение вырождается в точку, и $S(0)=\pi ab$, так как в сечении получается обыкновенный эллипс. Таким образом, имеем $V=\frac{2c}{6}\cdot\left(S(-c)+4S(0)+S(c)\right)=\frac{4}{3}\pi abc$.

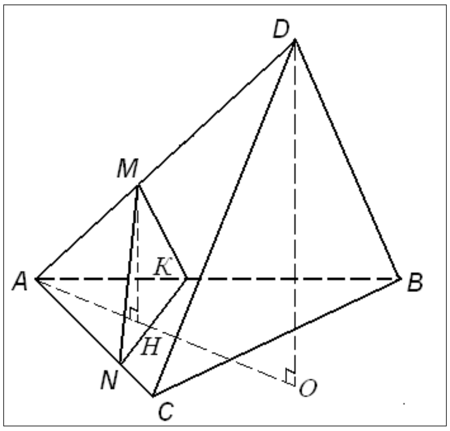
2. Объём многогранника, в который вписан шар

Пусть в тетраэдре ABCD точка O – центр вписанной сферы. Тогда объём каждой пирамиды OABC, OBCD, OCDA, OBDA равен $\frac{1}{3}r\cdot S_i$, где r – высота каждой пирамиды, а S_i – площади граней исходного тетраэдра. Таким образом, объём тетраэдра ABCD вычисляется по формуле $\boxed{V=\frac{1}{3}r\cdot S_{полн.}}$.

Очевидно, что формула применима к любому многограннику, в который можно вписать шар.

3. Объёмы тетраэдров, имеющих равный трёхгранный угол

Исходя из рисунка, подобия треугольников и теоремы о соотношении площадей треугольников, имеющих равный угол, определим отношение объёмов тетраэдров, имеющих равный трёхгранный



угол $\frac{V_{AMNK}}{V_{ABCD}} = \frac{MH \cdot S_{ANK}}{DO \cdot S_{ABC}} = \frac{MH \cdot AK \cdot AN}{DO \cdot AB \cdot AC} = \frac{AM \cdot AK \cdot AN}{AD \cdot AB \cdot AC}$ Таким образом, отношение объёмов равно отношению произведений трёх рёбер, исходящих из вершины общего трёхгранного угла каждого тетраэдра.

Пример: В треугольной пирамиде ABCD на ребре AD взята точка M, а на ребре AB взята точка K так, что AM : MD = 7 : 3, AK : KB = 1 : 4. Сколько процентов от объёма пирамиды ABCD составляет объём пирамиды AMKC?

Подставим отношение отрезков в полученную выше формулу и получаем следующий результат

$$\frac{V_{AMKC}}{V_{ABCD}} \cdot 100\% = \frac{AM \cdot AK}{AD \cdot AB} \cdot 100\% = \frac{7 \cdot 1}{10 \cdot 5} \cdot 100\% = 14\%.$$

Вариант №1	Вариант №2
1. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5 : 4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC = 12см.	**1.** Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13см, BC = 24см. Найдите, в каком отношении, считая от вершины B, биссектриса угла A делит высоту, проведённую из этой вершины.
2. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 8 см и 15 см, а средняя линия равна 8,5 см.	**2.** Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 20 см и 21 см, а средняя линия равна 14,5 см.
3. Три окружности, радиусы которых равны 2см, 3см и 10см, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.	**3.** Три окружности, радиусы которых равны 4см, 8см и 12см, попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры этих трёх окружностей.

Вариант №1	Вариант №2
1. Треугольник, площадь которого равна 36см^2, вращается вокруг одной из сторон. Объём полученного тела вращения 192π см^3,а его поверхность 216π см^2. Определить стороны треугольника.	**1.** Треугольник, площадь которого равна 84см^2, вращается вокруг одной из сторон. Объём полученного тела вращения 672π см^3,а его поверхность 336π см^2. Определить стороны треугольника.
2. Найти косинус угла, образованного плоскостью $4x-12y+6z-13=0$ с координатной плоскостью XOY.	**2.** Найти угол между плоскостями $2x+5y+4z+15=0$ и $6x-3z+2=0$
3. ABCD – тетраэдр. A(1;-4;-1), B(0;-2;1), C(2;0;0), D(5;2;4). Найти длину проекции ребра CD на плоскость ABC.	**3.** ABCD – тетраэдр. A(-2;0;0), B(1;2;2), C(-2;4;2), D(2;2;4). Найти величину угла между ребром AD и высотой, опущенной из вершины D на плоскость ABC.

Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах

За основу раздела принимается сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы. Ниже приведены самостоятельные работы на параметры по всем разделам алгебры старшей школы. Выполнение этих работ является необходимой подготовкой к выполнению заданий в ЕГЭ

Вариант №1	**Вариант №2**
1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решения уравнения $(x-6a)^2+(x-2a)^2=128$ симметричны относительно точки $x=12$.	**1.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решения уравнения $(x-2a)^2+(x-4a)^2=242$ симметричны относительно точки $x=-3$.
2. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения $9(3x-1)a^2-(21x-19)a+2(x-1)=0$.	**2.** Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения $2(4x-1)a^2-(14x-11)a+5(x-1)=0$.
3. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(20a-3)x+100a^2-30a=0$ в 6 раз больше, чем его меньший корень.	**3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(8a-7)x+16a^2-28a=0$ в 10 раз больше, чем его меньший корень.
4. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень.	**4.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень.
5. Определите, при каких значениях параметра *a* неравенство $(x-a)(a-2x+1)\le 0$ верно для всех $x\in[-2;3]$.	**5.** Определите, при каких значениях параметра *a* неравенство $(a-x)(x-3a+6)\le 0$ верно для всех $x\in[1;4]$.

Вариант №1 **1.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2a, \\ \frac{5}{x}+\frac{12}{y}=1-3a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. **2.** При каждом значении параметра a решите неравенство $\frac{3}{ax+a}>\frac{1}{5}$. **3.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решением неравенства $\frac{x^2+x-12}{x^2-(a-4)x-4a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.	**Вариант №2** **1.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4a, \\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=1-a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. **2.** При каждом значении параметра a решите неравенство $\frac{1}{ax-a}>\frac{3}{4}$. **3.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решением неравенства $\frac{x^2-5x-6}{x^2-(a-1)x-a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

Вариант №1 **1.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5ax+3a}=5x+3$ имеет ровно одно решение. **2.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt{4a^2-x^2}\geq\lvert x-2a\rvert$ имеет единственное решение. **3.** Решите при всех значениях параметра $\sqrt{x^2+ax}=x-2a$.	**Вариант №2** **1.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3ax+5a}=3x+5$ имеет ровно одно решение. **2.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt{3a^2-x^2}\geq\lvert x+a\rvert$ имеет единственное решение. **3.** Решите при всех значениях параметра $\sqrt{x^2-ax}=x+2a$.

Вариант №1

1. При каких значениях параметра a уравнение
$(15\sin x - a - 5)(15\sin x + 2a - 5) = 0$
имеет ровно два решения на отрезке $[0;2\pi]$?

2. Для всех значений параметра a решите уравнение: $\sin 3x = a\sin x$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений
$$\begin{cases} 24\cos^2 x + 11\cos^2 y = 10a - 17, \\ 33\cos^2 x + 8\cos^2 y = 28a - 59. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых прямая $y = a$

пересекает хотя бы в одной точке

график функции $y = \dfrac{tg^2 x + 7}{3tgx + 1}$.

Вариант №2

1. При каких значениях параметра a уравнение
$(11\sin x - 3a - 5)(11\sin x + 4a + 3) = 0$
имеет ровно два решения на отрезке $[0;2\pi]$?

2. Для всех значений параметра a решите уравнение: $\cos 3x = a\cos x$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений
$$\begin{cases} 21\cos^2 x + 11\cos^2 y = 9a - 8, \\ 33\cos^2 x + 7\cos^2 y = 45a - 64. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых прямая $y = a$

пересекает хотя бы в одной точке

график функции $y = \dfrac{tg^2 x + 45}{7tgx + 2}$.

Вариант №1

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$25^x + (5\cdot a^2 + a + 4)\cdot 5^x - a - 2 = 0$
имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$9^x - (7a - 1)\cdot 3^x + 12a^2 - a - 6 \le 0$ имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$4^{49x^2 - 70x + 26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$
имеет решения. Найдите эти решения.

4. При каком значении a уравнение

Вариант №2

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$81^x + (4\cdot a^2 + 3\cdot a + 4)\cdot 9^x - 2\cdot a + 3 = 0$
имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$4^x - (5a - 1)\cdot 2^x + 6a^2 - a - 2 \le 0$ имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$14^{25x^2 - 10x + 2} = \cos 10\pi x - 36a^2 - 60a - 12$
имеет решения. Найдите эти решения.

4. При каком значении a уравнение

$\sqrt{2^{a+2+2x}}-2^{2x}=y^2-2y\sqrt{a}+11$ имеет единственное решение.	$2^{2a+3+x}-4^{x+1}=4y^2-8y\sqrt{a}+9$ имеет единственное решение.

Вариант №1

1. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$\ell og_3 \dfrac{3}{14x^2+3}=x^2+(5b-1)^2$ имеет хотя бы одно решение.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$\ell og_{11}^2 x-(10a+23)\ell og_{11}x+25a^2+115a+132=0$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x=66$.

3. Для всех значений параметра a решить неравенство: $x^{\ell og_a x}>a^3x^2$

Вариант №2

1. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$\ell og_9 \dfrac{9}{10x^2+9}=x^2+(13b-12)^2$ имеет хотя бы одно решение.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$\ell og_4^2 x-(6a+23)\ell og_4 x+9a^2+69a+132=0$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x=40$.

3. Для всех значений параметра a решить неравенство: $x^{\ell og_a x}<a^2x$.

Список литературы

1. Малышев И.Г. и др. *Элементы физико-математического моделирования в естествознании. Элементы планиметрии в старшей школе.* // Н.Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 2005 г.
2. Малышев И.Г. и др. *Многочлены в школьном курсе математики и на вступительных экзаменах* // Н.Новгород: издательство ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2006 г.
3. Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ / авт.-сост. А.П.Власова, Н.В. Евсеева, Н.И. Латанова и др. – М.: АСТ: Астрель, 2020.
4. Единый государственный экзамен 2016. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр,2020.
5. ЕГЭ 2020. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панферов В.С., Семенов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО,2020.
6. ЕГЭ 2020. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2020.
7. Ященко И.В., Шестаков С.А. Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2020 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2020.
8. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2020 (открытый банк заданий)